

## Algunos elementos para la construcción de un Método de Multiescala Variacional “a posteriori”.

TOMÁS CHACÓN REBOLLO<sup>1</sup>, ANTONIO DOMÍNGUEZ DELGADO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, E-41080 Sevilla. E-mail: chacon@us.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla, Sevilla. E-mail: domdel@us.es.

**Palabras clave:** Métodos Multiescala, SUPG, convección dominante, estabilización.

### Resumen

El presente trabajo está dedicado a la resolución de problemas de la Mecánica de Fluidos incompresibles en régimen de convección dominante. Nuestro propósito es presentar una técnica de post-proceso de una solución Galerkin con E.F.  $\mathbb{P}_1$  inicial oscilante, que permite recuperar a partir de la misma, otra solución no oscilatoria, y que además es una aproximación de segundo orden de la solución continua.

Presentamos también, una extensión de esta técnica al caso no lineal, proporcionando un método eficaz para la resolución de choques.

Como extensión del Método Multiescala Variacional debido a Hughes, estamos introduciendo un Método Multiescala Variacional “a posteriori”.

## 1 Introducción

Consideramos el problema de convección-difusión en una dimensión:

$$\begin{cases} a u' - \nu u'' = f & \text{en } [0, 1] \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

donde la constante  $a$  representa la velocidad de convección del fluido y  $\nu$  es el coeficiente de difusión. Supondremos  $a \neq 0$ ,  $\nu > 0$ .

Consideramos una discretización de (1) mediante una aproximación Galerkin con elementos finitos, usando funciones afines a trozos sobre una partición  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$  del intervalo  $[0, 1]$  de tamaño uniforme  $h = 1/N$ .

El espacio aproximante será entonces:

$$\tilde{X}_h = \left\{ x_h \in C^0[0, 1] \mid x_h|_{]x_{j-1}, x_j[} \in P_1, \quad 1 \leq j \leq N \right\}.$$

Denotemos por  $\{\varphi_i\}_{i=0}^N$  la base canónica del espacio considerado, es decir cada  $\varphi_i$  es afín en cada subintervalo  $]x_{j-1}, x_j[$ ,  $1 \leq j \leq N$  y  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ,  $0 \leq i, j \leq N$ .

Aproximamos la solución  $u$  de (1) mediante,  $u_h = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_i \in \tilde{X}_h$ , con  $u_0 = 0$ ,  $u_N = 1$  y  $u_i = u_h(x_i)$ .

Denotemos por  $Pe_h = \frac{|a|h}{2\nu}$  el llamado número de Péclet de malla asociado a la discretización.

Es bien conocido que cuando  $Pe_h < 1$  la sucesión  $\{u_i\}_{i=0}^N$  satisface el principio del máximo discreto, justo lo contrario que sucede cuando  $Pe_h > 1$ , y por ello en este caso, es decir, en situaciones de convección dominante, aparecen oscilaciones espúreas en la solución discreta de (1).

El método SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) proporciona una técnica para eliminar las oscilaciones espúreas antes descritas en la discretización Galerkin de las ecuaciones de convección-difusión 1D. También permite amortiguarlas en problemas de convección multidimensional. Recordamos que la estabilización propuesta por el método SUPG, [4], equivale a discretizar por diferencias finitas centradas la ecuación

$$a u' - (\nu + \nu_{num}) u'' = f, \quad (2)$$

con  $\nu_{num} = \nu Pe_h \xi(Pe_h)$ , donde

$$\xi(\alpha) = \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha}.$$

La elección indicada de  $\nu_{num}$ , se deduce imponiendo que sobre los nodos de la malla, la solución aproximada  $u_h$  que proporciona el método de Galerkin aplicado a (2) coincida con la solución exacta de (1), es decir  $u_h(x_i) = u(x_i)$ ,  $0 \leq i \leq N$ . Por tanto, con la técnica empleada en la construcción del método SUPG, se busca conseguir un método más estable y de precisión óptima.

En [8], se demuestra que el esquema numérico (2) proporcionado por el método SUPG es equivalente a añadir al espacio  $\tilde{X}_h$ , una burbuja “óptima” por elemento y “condensarla” después.

Por “burbuja” sobre el elemento  $]x_{i-1}, x_i[$  por ejemplo, entendemos cualquier función de  $H_0^1([x_{i-1}, x_i])$ , extendida por cero a todo  $[0, 1]$ .

”Condensar” las burbujas significa eliminar explícitamente los grados de libertad “burbuja” y obtener la ecuación equivalente satisfecha por la componente  $\mathbb{P}1$  de la solución.

Este método es un caso particular del Método Multiescala Variacional introducido por Hughes en 1995 , [7]: la componente  $\mathbb{P}1$  de la velocidad constituye las ”escalas resueltas”, mientras que la componente ”burbuja” forma las escalas ”no resueltas”, cuyo efecto es incorporado a la ecuación satisfecha por las escalas resueltas. Este efecto es una viscosidad numérica que en el caso óptimo es la precisa para que la solución proporcionada por el método SUPG coincida con la solución exacta en los nodos de la malla.

## 2 Autoestabilización óptima: caso de coeficientes constantes.

Consideremos una descomposición de  $X_h$  en la forma  $X_h = Y_h \oplus Z_h$ , donde  $Y_h$  y  $Z_h$  son subespacios de  $X_h$ , siendo  $Y_h$  de elementos finitos, con  $Y_h \cap Z_h = \{0\}$ .

Si  $f$  es constante, es posible determinar  $Z_h$  de forma que la aproximación filtrada de la solución oscilante  $u_h$  coincida en los nodos de la partición de paso  $2h$  con la solución exacta  $u$  del problema de convección difusión con coeficientes constantes (1), de modo análogo al método SUPG.

Tomamos como subespacio  $Y_h$ , el espacio de las funciones afines a trozos sobre la partición  $0 = x_0 < x_2 < \dots < x_{N-2} < x_N = 1$  del intervalo  $[0, 1]$ , y de tamaño uniforme  $2h$ . Construimos el espacio  $Z_h$  de base  $\{\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_{2M-1}\}$  de modo que se tenga la descomposición

$$u_h = \sum_{i=1}^M y_i \phi_i + \sum_{i=1}^M z_{2i-1} \varphi_{2i-1}, \quad \text{con } y_i = u(x_{2i}) \text{ para } 1 \leq i \leq M. \quad (3)$$

Para ello, el soporte mínimo que debe tener  $\varphi_{2i-1}$ ,  $2 \leq i \leq M$ , es el intervalo  $[x_{2i-3}, x_{2i}]$ , y el soporte mínimo de  $\varphi_1$  debe ser  $[x_0, x_2]$ . En este caso, (3) puede ser resuelto analíticamente de forma única. Definimos las siguientes funciones de base,

$$\varphi_{2i-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{h}(x - x_{2i-1}) + 1, & \text{si } x \in [x_{2i-1}, x_{2i}], \\ a_{2i-1}(x - x_{2i-1}) + 1, & \text{si } x \in [x_{2i-2}, x_{2i-1}[ , \\ (\frac{1}{h} - a_{2i-1})(x - x_{2i-3}), & \text{si } x \in [x_{2i-3}, x_{2i-2}[ \text{ y } i \geq 2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4)$$

Imponiendo la condición de que la solución discreta coincida en los nodos pares con la solución exacta, obtenemos

$$z_1 = u_h(x_1) - \frac{1}{2}u(x_2), \quad a_1 = \frac{1}{h},$$

y para  $i = 2, 3, \dots, M$ ,

$$\begin{aligned} z_{2i-1} &= u_h(x_{2i-1}) - \frac{1}{2}(u(x_{2i-2}) + u(x_{2i})), \\ a_{2i-1} &= -\frac{1}{h} \left[ \frac{u_h(x_{2i-2}) - u(x_{2i-2})}{z_{2i-1}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

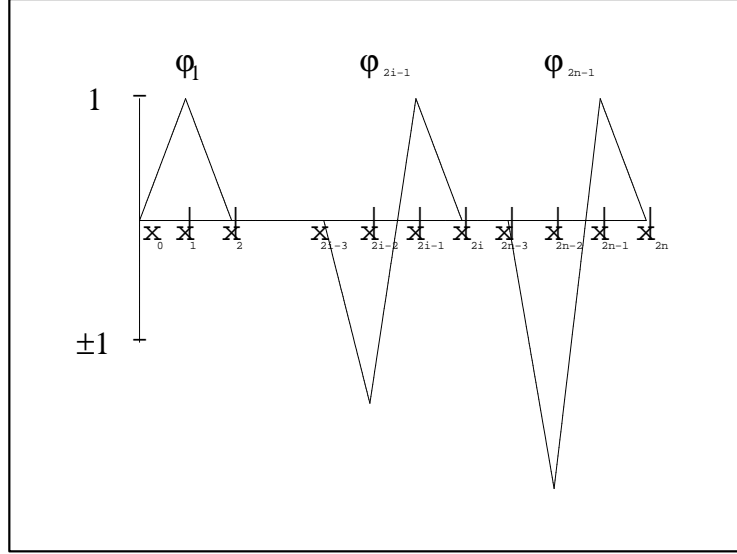


Figura 1: Base óptima de  $Z_h$  para la ecuación de Convección-Difusión (1), para  $Pe_h = 10$ .

En la Figura 1 aparecen representadas las funciones de base de  $Z_h$ . Podemos observar cómo las pendientes  $a_{2i-1}$  se incrementan al acercarse el punto  $x_{2i-1}$  a la capa límite.

Es claro que  $Z_h$  depende de la solución exacta  $u$ . Ahora bien, dado que  $u(x_{2i}) = \frac{1 - e^{2iPe_h}}{1 - e^{Pe_h}}$ , en realidad  $Z_h$  depende únicamente del número de Péclet de malla. Esto permite generalizar la definición de  $Z_h$  a problemas con velocidad de convección variable, cambiando el número de Péclet de malla que define cada pendiente  $a_{2i-1}$ , por un número de Péclet de malla promedio en un entorno de  $x_{2i-1}$ .

Por otro lado observemos que con esta construcción  $Z_h$  es subespacio de  $H_0^1([0, 1])$ . Además, es inmediato que  $X_h = Y_h + Z_h$ . En efecto, dada una función  $x_h \in X_h$ , se tiene

$$x_h = \sum_{i=1}^M \hat{y}_i \phi_i + \sum_{i=1}^M \hat{z}_{2i-1} \varphi_{2i-1}, \quad (5)$$

donde los coeficientes  $\hat{y}_i, \hat{z}_{2i-1}$ , están dados de forma recursiva, para  $i = M, M-1, \dots, 1$  por,

$$\hat{z}_{2i-1} = \frac{x_h(x_{2i-2}) - 2x_h(x_{2i-1}) + \hat{y}_i}{-1 - ha_{2i-1}}, \quad \hat{y}_{i-1} = 2(x_h(x_{2i-1}) - \hat{z}_{2i-1}) - \hat{y}_i.$$

Observemos que las pendientes  $a_{2i-1}$  son positivas, como se comprueba sin dificultad, por lo que los denominadores  $-1 - ha_{2i-1}$  son estrictamente negativos, y por tanto los valores de  $\hat{z}_{2i-1}$ , están bien definidos para  $1 \leq i \leq M$ .

Concluyendo, podemos considerar que el método presentado con la elección realizada del espacio  $Z_h$ , puede ser visto como un método SUPG “a posteriori”, en el que para el caso de coeficientes constantes se recupera la solución exacta sobre la malla de paso  $2h$ .

En este sentido estamos introduciendo un método Multiescala Variacional “a posteriori”. Nuestras escalas “resueltas” constituyen el espacio  $Y_h$ , mientras que las “no resueltas” forman el espacio  $Z_h$ .

### 3 Ecuaciones de convección-difusión no lineales.

En esta sección aplicamos el procedimiento de autoestabilización óptima a un problema de convección difusión evolutivo no lineal, concretamente la ecuación del tráfico.

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + F_x(u(x, t)) = \nu u_{xx}(x, t), & x \in [0, 1], \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (6)$$

donde  $u$  representa la densidad del tráfico y la función de flujo  $F$  es dos veces diferenciable, y verifica,

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \quad F(u_{max}) = 0 \\ F(u) &> 0 \quad \text{y} \quad F''(u) < 0 \quad \text{en} \quad 0 < u < u_{max}. \end{aligned} \quad (7)$$

El flujo  $F(u)$  depende de la vía en que circula el tráfico. Aquí hemos considerado el caso modelo

$$F(u) = u(1 - u).$$

Si consideramos un problema de Riemann,

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{if } x \in [0, 1/2], \\ u_R & \text{if } x \in [1/2, 1], \end{cases} \quad (8)$$

con  $u_L < u_R$ , la solución está formada por dos estados constantes unidos mediante un choque con difusión, que se desplaza hacia la izquierda .

Para resolver (6), discretizamos en tiempo mediante el esquema semi-implícito de Euler, obteniendo una ecuación con la estructura

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} u^{n+1} + a(x) (u^{n+1})' - \nu (u^{n+1})'' &= f^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} u^n \\ u^{n+1}(0) &= u_L, \quad u^{n+1}(1) = u_R, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

donde  $a(x) = F'(u^n)$ .

Discretizamos ahora (9) por el método Galerkin estándar, usando para ello el espacio

de Elementos Finitos  $X_h$ . De esta forma, en cada etapa de tiempo resolvemos el problema:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Obtener } u_h^{n+1} \in X_h \text{ tal que } \forall v_h \in X_h, \\ &\frac{1}{\Delta t}(u_h^{n+1}, v_h) + (a(u_h^{n+1})', v_h) - \nu((u_h^{n+1})', v_h') = \\ &\quad = \langle f^{n+1}, v_h \rangle + \frac{1}{\Delta t}(u_h^n, v_h) \\ &u_h^{n+1}(0) = u_L, \quad u_h^{n+1}(1) = u_R. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Al aproximar la solución mediante el método de Galerkin usando Elementos Finitos  $\mathbb{P}1$  Lagrange, la aproximación que se obtiene para altos valores del Péclet de malla, viene afectada de fuertes oscilaciones en torno al choque, (ver Fig. 3).

Es posible aplicar a la solución de (10) el filtrado óptimo descrito en la sección anterior. Con ello se eliminan las oscilaciones espúreas. Sin embargo, es mucho mejor estrategia aplicar este filtrado sólo en el instante de tiempo en que interese calcular la solución con precisión:

#### ALGORITMO FILTRADO ÓPTIMO CASO NO LINEAL:

##### Inicialización.

Se determinan  $N$ ,  $\Delta t = T/N$ ,  $u_h^0$  y  $\Delta t^*$ : número cercano a la precisión del ordenador (pero mayor).

##### I: Iteración en tiempo sin filtrar.

Se resuelve el sistema (10), obteniendo  $u_h^{n+1}$  a partir de  $u_h^n$ , para  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

##### II: Filtrado.

II.1: Se resuelve el sistema (10), obteniendo  $u_h^{N*}$  a partir de  $u_h^N$  usando el paso de tiempo  $\Delta t^*$ .

II.2: Se efectúa el filtrado “óptimo” de  $u_h^{N*}$ , usando la base “óptima” de  $Z_h$  determinada mediante los promedios de  $u_h^{N*}$  sobre cada intervalo  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ .

II.3: Si la solución presenta oscilaciones se hace  $u_h^N = u_h^{N*}$  y se vuelve a II.1.

Observemos de nuevo que el filtrado no se realiza sino hasta el mismo instante de tiempo  $T$  en el que queremos obtener la solución.

## 4 Tests Numéricos.

Presentamos en primer lugar un test para la ecuación de convección difusión lineal (1), con término fuente lineal. Como se aprecia en la figura, nuestra técnica de postproceso óptimo permite recuperar la solución exacta sobre la malla de paso  $2h$ . El resultado obtenido se muestra en la Fig.2

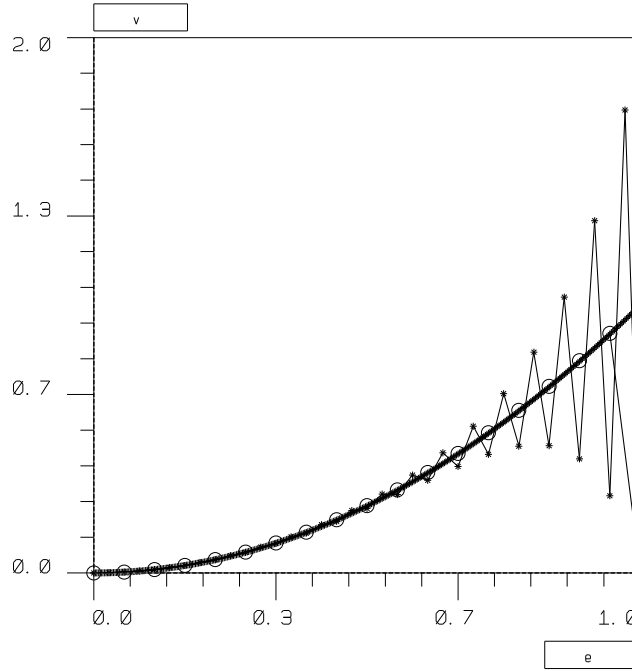


Figura 2: Solución exacta (línea marcada por +), de la ecuación de Convección-Difusión con término fuente lineal y condiciones de contorno homogéneas, aproximación por MEF-Galerkin  $P_1$  (línea marcada por \*) y aproximación filtrada con  $Z_h$  óptimo (línea marcada por o), para  $Pe_h = 10$ .

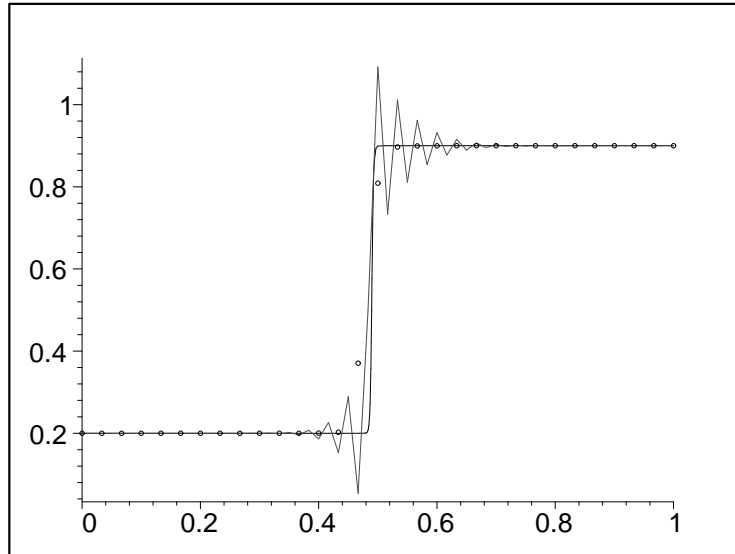


Figura 3: Solución Galerkin (línea de puntos), solución filtrada (o), y solución exacta (solid line), para  $N = 60, \nu = 0.001, t = 0.1$ .

En el segundo test se ha aplicado la técnica de postproceso al problema no lineal de tráfico dado por (6) con las condiciones iniciales (8). Los datos del test son:

$$N = 60, \nu = 0.001, T = 0.1, \Delta t = 1/200, \quad u_L = 0.2, u_R = 0.9$$

De aquí  $Pe_h = 16.66$ . El número de filtrados realizados (paso II.3), una vez alcanzado el tiempo final es de 6.

Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 3.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto del Plan Nacional de I+D MTM2006-1750.

## Referencias

- [1] C. Baiocchi, F. Brezzi and L. P. Franca (1993), *Virtual Bubbles Galerkin-least-squares type methods (Ga.L.S.)* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 105, pp. 125-141.
- [2] F. Brezzi, M. O. Bristeau, L. P. Franca, M. Mallet and G. Rogé (1992), *A relationship between stabilized finite element methods the Galerkin method with bubble functions*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 96, pp. 117-129.
- [3] F. Brezzi and J. Douglas (1988), *Stabilized mixed methods for the Stokes problem*, Numer. Math. 53, pp 225-236.
- [4] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes (1982), *Streamline/Upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows, with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 32, pp. 199-259.
- [5] Tomás Chacón Rebollo and Antonio Domínguez Delgado (2000), *A Unified Analysis of Mixed and Stabilized Finite Element Solutions of Navier-Stokes Equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 182, pp: 301-331.
- [6] T. J. R. Hughes, L.P. Franca and M. Balestra (1986), *A new Finite Element formulation for CFD : V. Circumventing the Brezzi-Babuška condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 59, pp. 85-99.
- [7] T. J. R. Hughes (1995), *Multiscale phenomena: Grenn's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid-scale models bubbles and the origin of stabilized methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 127, pp. 387-401.
- [8] Alessandro Russo (1996), *Bubble stabilization of finite element methods for the linearized incompressible Navier-Stokes equations.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 132, pp.335-354.